Ein höchst bemerkenswertes Theorem über die Integralformel $\int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^{n+1}}$*

Leonhard Euler

Lemma

§1 Diese Formel verlangt keine andere Einschränkung, als dass der Buchstabe λ nur ganze positive oder negative Zahlen bezeichnet. Es ist aber ersichtlich, dass die negativen Werte nicht von den positiven abweichen, weil immer $\cos(-\varphi) = \cos(+\varphi)$ ist. Wenn nach Bemerken dieser Tatsache das Integral dieser Formel von der Grenze $\varphi = 0$ bis hin zur Grenze $\varphi = 180^\circ$ oder $\varphi = \pi$ erstreckt wird, wird sein Wert immer mit der folgenden Formeln ausgedrückt werden

$$\frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^{2n+1}}V,$$

mit

$$V = \binom{n-\lambda}{0}\binom{n+\lambda}{\lambda} + \binom{n-\lambda}{1}\binom{n+\lambda}{\lambda+1}aa + \binom{n-\lambda}{2}\binom{n+\lambda}{\lambda+2}a^4$$

*Originaltitel: "Theorema maxime memorabile circa formulam integralem $\int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^{n+1}}$", zuerst publiziert in: *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1794, verfasst 1778): pp. 194–217, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 141 – 167, Eneström-Nummer E672, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$+\binom{n-\lambda}{3}\binom{n+\lambda}{\lambda+3}a^6+\binom{n-\lambda}{4}\binom{n+\lambda}{\lambda+4}a^8+\binom{n-\lambda}{5}\binom{n+\lambda}{\lambda+5}a^{10}+\text{etc.};$$

dort sind die Formeln in Klammern keine Brüche, sondern bedeuten diese Symbole, mit denen die Binomialkoeffizienten angezeigt zu werden pflegen, sodass

$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}\cdots\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}$$

ist, welcher Ausdruck, weil ja in unserem Fall β überall eine ganze Zahl ist, einen im entsprechenden Fall leicht darzubietenden bestimmten Wert anzeigt, wo es ausreichen wird bemerkt zu haben, dass, sooft $\beta = 0$ war, immer $\binom{\alpha}{0} = 1$ sein wird; wenn aber β eine negative Zahl war, wird der Wert dieses Symbols zu Null; aber dann ist es auch ratsam zu bemerken, dass, wenn $\beta = \alpha$ war, $\binom{\alpha}{\alpha} = 1$ sein wird, und wenn $\beta > \alpha$ ist, verschwinden die Werte gleichermaßen, weil immer $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha}{\alpha-\beta}$ ist.

§2 Nachdem all dies erklärt worden ist, wollen wir die wesentlichen Fälle entwickeln, in denen dem Exponenten n die einfacheren Werte 0, 1, 2, 3, 4 etc. zugeteilt werden.

FALL I,
IN WELCHEM $n = 0$ UND DIESE INTEGRALFORMEL VORGELEGT IST

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{1+aa-2a\cos\varphi}\begin{bmatrix}\text{von }\varphi=0\\ \text{bis }\ \varphi=\pi\end{bmatrix}$$

Weil ja hier $n = 0$ ist, werden wir für die ersten Faktoren der Größe V

$$\binom{0-\lambda}{0}=1,\quad\binom{0-\lambda}{1}=-\lambda,\quad\binom{0-\lambda}{2}=\frac{\lambda}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2},$$

$$\binom{0-\lambda}{3}=-\frac{\lambda}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2}\cdot\frac{\lambda+2}{3},\quad\binom{0-\lambda}{4}=\frac{\lambda}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2}\cdot\frac{\lambda+2}{3}\cdot\frac{\lambda+3}{4}\quad\text{etc.}$$

haben. Für die zweiten Faktoren werden wir hingegen

$$\binom{0+\lambda}{\lambda}=1,\quad\binom{0+\lambda}{\lambda+1}=0,\quad\binom{0+\lambda}{\lambda+2}=0\quad\text{etc.}$$

haben; hier verschwinden natürlich all diese Faktoren außer dem ersten, woher man den Wert der Größe V als $= 1$ berechnet, und deshalb wird das gesuchte Integral für diesen Fall $= \frac{\pi a^\lambda}{1-aa}$.

Wenn also $\lambda = 0$ war, wird

$$\int \frac{\partial\varphi}{1+aa-2a\cos\varphi} = \frac{\pi}{1-aa}$$

sein, was hervorragend mit der hinreichend bekannten Integration

$$\int \frac{\partial\varphi}{\alpha+\beta\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha-\beta\beta}} \arccos\frac{\alpha\cos\varphi+\beta}{\alpha+\beta\cos\varphi}$$

übereinstimmt, welches Integral schon von selbst für $\varphi = 0$ verschwindet. Man setze also, wie wir hier durchgehend annehmen, $\varphi = 180^\circ = \pi$ und wegen $\cos\varphi = -1$ wird dieses Integral

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha-\beta\beta}} \arccos(-1) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\alpha-\beta\beta}}$$

sein. Nun ist in unserem Fall $\alpha = 1+aa$ und $\beta = -2a$, woher $\sqrt{\alpha\alpha-\beta\beta} = 1-aa$ wird.

FALL II,
IN WELCHEM $n = 1$ UND DIESE INTEGRALFORMEL VORGELEGT IST

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^2} \begin{bmatrix}\text{von } \varphi = 0\\ \text{bis } \varphi = \pi\end{bmatrix}$$

Weil hier $n = 1$ ist, wird für die ersten Faktoren der Größe V

$$\binom{1-\lambda}{0} = 1, \quad \binom{1-\lambda}{1} = -(\lambda-1), \quad \binom{1-\lambda}{2} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2} \quad \text{etc.}$$

Für die zweiten Faktoren werden wir hingegen

$$\binom{1+\lambda}{\lambda} = \lambda+1, \quad \binom{1+\lambda}{\lambda+1} = 1$$

haben; die folgenden Formeln verschwinden aber alle und so wird

$$V = \lambda+1-(\lambda-1)aa$$

sein, weshalb der Wert des vorgelegten Integrals

$$\frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^3}((\lambda+1)-(\lambda-1)aa)$$

sein wird; daher wird es also förderlich sein, die folgenden Spezialfälle aufgelistet zu haben, wo wir der Kürze wegen anstelle der Formel $1+aa-2a\cos\varphi$ das Zeichen Δ schreiben wollen

$$\int\frac{\partial\varphi\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}=\frac{2\pi a}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^2(3-aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^3(4-2aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 4\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^4(5-3aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 5\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^5(6-4aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 6\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^6(7-5aa)}{(1-aa)^3}$$

etc.

FALL III, IN DEM $n=2$ UND DIESE INTEGRALFORMEL VORGELEGT WIRD

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^3}\begin{bmatrix}\text{von } \varphi=0\\ \text{bis } \varphi=\pi\end{bmatrix}$$

Hier werden die ersten Faktoren, welche im Wert der Größe V auftreten,

$$\left(\frac{2-\lambda}{0}\right)=1,\quad\left(\frac{2-\lambda}{1}\right)=-(\lambda-2),\quad\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)=\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{1\cdot 2},$$

$$\binom{2-\lambda}{3} = -\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}{1\cdot 2\cdot 3} \quad \text{etc.,}$$

die zweiten Faktoren werden

$$\binom{2+\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda+2}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2}, \quad \binom{2+\lambda}{\lambda+1} = \lambda+2, \quad \binom{2+\lambda}{\lambda+2} = 1$$

sein und die folgenden verschwinden alle; daher berechnen wir also

$$V = \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{1\cdot 2} - (\lambda\lambda-4)aa + \frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{1\cdot 2}a^4$$

und nach Finden dieses Wertes wird das gesuchte Integral

$$\frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^5}V$$

sein, woraus wir die folgenden Spezialfälle, indem wir wie zuvor

$$1+aa-2a\cos\varphi = \Delta$$

setzen, entwickeln wollen

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi}{(1-aa)^5}(1+4aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi a}{(1-aa)^5}(1+aa),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{6\pi a^2}{(1-aa)^5},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^5}(10-5aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 4\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi a^4}{(1-aa)^5}(5-4aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 5\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi a^5}{(1-aa)^5}(7-7aa+2a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} = \frac{2\pi a^6}{(1-aa)^5}(14-16aa+5a^4),$$

etc.

FALL IV,
IN DEM $n = 3$ UND DIESE INTEGRALFORMEL VORGELEGT IST

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^4}\begin{bmatrix}\text{von } \varphi = 0\\ \text{bis } \ \varphi = \pi\end{bmatrix}$$

Hier werden wir für die ersten Faktoren der Größe V

$$\binom{3-\lambda}{0} = 1, \quad \binom{3-\lambda}{1} = -(\lambda-3), \quad \binom{3-\lambda}{2} = \frac{3-\lambda}{1}\cdot\frac{2-\lambda}{2},$$

$$\binom{3-\lambda}{3} = \frac{3-\lambda}{1}\cdot\frac{2-\lambda}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{3}, \quad \binom{3-\lambda}{4} = \frac{3-\lambda}{1}\cdot\frac{2-\lambda}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{3}\cdot\frac{-\lambda}{4} \quad \text{etc.}$$

haben, die zweiten Faktoren werden aber

$$\binom{3+\lambda}{\lambda} = \frac{3+\lambda}{1}\cdot\frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{1+\lambda}{3}, \quad \binom{3+\lambda}{\lambda+1} = \frac{3+\lambda}{1}\cdot\frac{2+\lambda}{2},$$

$$\binom{3+\lambda}{\lambda+2} = 3+\lambda, \quad \binom{3+\lambda}{\lambda+3} = 1$$

sein und alle folgenden verschwinden; daher berechnen wir also

$$V = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{(\lambda+2)(\lambda\lambda-9)}{1\cdot 2}aa + \frac{(\lambda-2)(\lambda\lambda-9)}{1\cdot 2}a^4$$
$$-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1\cdot 2\cdot 3}a^6.$$

Nachdem dieser Wert gefunden worden ist, berechnen wir das gesuchte Integral als

$$= \frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^7}V$$

und daher wollen wir die folgenden Spezialfälle, indem wir wie bisher

$$1 + aa - 2a\cos\varphi = \Delta$$

setzen, entwickeln

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi}{(1-aa)^7}(1+9aa+9a^4+a^6),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^4} = \frac{4\pi a}{(1-aa)^7}(1+3aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta^4} = \frac{10\pi a^2}{(1-aa)^7}(1+aa),$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^4} = \frac{20\pi a^3}{(1-aa)^7},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 4\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi a^4}{(1-aa)^7}(35-21aa+7a^4-a^6)$$

etc.

§3 Es wäre hier überflüssig weiter fortzuschreiten, weil die allgemeine für V gefundene Formel die ganze Aufgabe sehr leicht erfüllt; aber es wird nicht ohne Nutzen sein, dem Buchstaben n auch negative Werte zuzuteilen, in welchen Fällen die ganze Integration mit gewohnten Methoden ohne Mühe erledigt wird, woher es angenehm sein wird, die wunderbare Übereinstimmung unserer allgemeinen Form zu erkennen.

Fall I,
in welchem $n = -1$ und diese Integralformel vorgelegt wird

$$\int \partial\varphi \cos\lambda\varphi \begin{bmatrix} \text{von } \varphi = 0 \\ \text{bis } \ \ \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Diese Formel ist uneingeschränkt integrierbar, weil

$$\int \partial\varphi \cos\lambda\varphi = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda\varphi$$

ist; weil diese Formel schon für $\varphi = 0$ gesetzt verschwindet, wird durch Nehmen von $\varphi = \pi$ wegen der ganzen Zahl λ dieser Wert immer $= 0$ sein, einzig ausgenommen im Fall $\lambda = 0$. Nachdem nämlich λ als unendlich klein angenommen worden ist, wird $\sin\lambda\pi = \lambda\pi$ sein und daher wird in diesem Fall der Wert $= \pi$ sein. Nun wird aber die allgemeine für die Größe V gegebene Form

$$V = \left(\frac{-1-\lambda}{0}\right)\left(\frac{-1+\lambda}{\lambda}\right) + \left(\frac{-1-\lambda}{1}\right)\left(\frac{-1+\lambda}{\lambda+1}\right)a^2 + \left(\frac{-1-\lambda}{2}\right)\left(\frac{-1+\lambda}{\lambda+2}\right)a^4$$
$$+ \left(\frac{-1-\lambda}{3}\right)\left(\frac{-1+\lambda}{\lambda+3}\right)a^6 + \left(\frac{-1-\lambda}{4}\right)\left(\frac{-1+\lambda}{\lambda+4}\right)a^8 + \left(\frac{-1-\lambda}{5}\right)\left(\frac{-1+\lambda}{\lambda+5}\right)a^{10} + \text{etc.}$$

sein. Alle zweiten Faktoren dieses Ausdrucks verschwinden, sooft entweder $\lambda = 1$ und $\lambda > 1$ war, weil die unteren Zahlen größer sind als die oberen, aber beide positiv; diese Folgerung gilt aber nicht, wannimmer die obere Zahl negativ wird, wie es im Fall $\lambda = 0$ passiert, welcher also gesondert betrachtet werden muss; in diesem werden aber die ersten Faktoren

$$\left(\frac{-1}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{1}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{2}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{4}\right) = +1 \quad \text{etc.}$$

werden, aber die zweiten Werte erhalten dieselben Bestimmungen und so werden wir

$$V = 1 + aa + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10} + \text{etc.}$$

haben; weil diese Reihe eine geometrische Reihe ist, wird $V = \frac{1}{1-aa}$ sein; daher, weil wegen $n = -1$ und $\lambda = 0$ der gesuchte Wert nach unserer allgemeinen Form $\pi(1-aa)V$ ist, geht dieser Wert nun wegen $V = \frac{1}{1-aa}$ in π über, wie oben.

Fall II,
in welchem $n = -2$ und diese Integralformel vorgelegt ist

$$\int \partial\varphi \cos\lambda\varphi \begin{bmatrix} \text{von } \varphi = 0 \\ \text{bis } \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Nach unserer allgemeinen Formel wird das gesuchte Integral $\pi a^\lambda (1-aa)^3 V$ sein, mit

$$V = \left(\frac{-2-\lambda}{0}\right)\left(\frac{-2+\lambda}{\lambda}\right) + \left(\frac{-2-\lambda}{1}\right)\left(\frac{-2+\lambda}{\lambda+1}\right) aa + \left(\frac{-2-\lambda}{2}\right)\left(\frac{-2+\lambda}{\lambda+2}\right) a^4$$

$$+ \left(\frac{-2-\lambda}{3}\right)\left(\frac{-2+\lambda}{\lambda+3}\right) a^6 + \left(\frac{-2-\lambda}{4}\right)\left(\frac{-2+\lambda}{\lambda+4}\right) a^8 + \left(\frac{-2-\lambda}{5}\right)\left(\frac{-2+\lambda}{\lambda+5}\right) a^{10} + \text{etc.}$$

Dort ist es wiederum ersichtlich, wenn entweder $\lambda = 2$ oder $\lambda > 2$ war, dass alle zweiten Faktoren verschwinden und daher $V = 0$ wird, sodass auch der gesuchte Wert des Integrals immer verschwindet, was aus der Natur der Formel von selbst folgt, deren Integral wegen

$$\cos\varphi\cos\lambda\varphi = \frac{1}{2}\cos(\lambda-1)\varphi + \frac{1}{2}\cos(\lambda+1)\varphi$$

im Allgemeinen

$$\frac{1+aa}{\lambda}\sin\lambda\varphi - \frac{a}{\lambda-1}\sin(\lambda-1)\varphi - \frac{a}{\lambda-1}\sin(\lambda+1)\varphi$$

sein wird, welches, weil $\lambda > 1$ ist, im Fall $\varphi = \pi$ offensichtlich verschwindet; daher ist es übrig, zwei Fälle zu betrachten, den einen, in dem $\lambda = 0$ ist, und den anderen, in dem $\lambda = 1$ ist.

I. Es sei $\lambda = 0$ und das Integral

$$\pi(1-aa)^3 V,$$

wo für V die zweiten Faktoren

$$\binom{-2}{0} = 1, \quad \binom{-2}{1} = -2, \quad \binom{-2}{2} = -3, \quad \binom{-2}{3} = -4, \quad \binom{-2}{4} = +5,$$
$$\binom{-2}{5} = -6 \quad \text{etc.}$$

werden; in gleicher Weise werden die ersten Faktoren

$$\binom{-2}{0} = 1, \quad \binom{-2}{1} = -2, \quad \binom{-2}{3} = 3 \quad \text{etc.}$$

sein, woher man berechnet, dass

$$V = 1 + 4aa + 9a^4 + 16a^6 + 25a^8 + 36a^{10} + \text{etc.}$$

sein wird. Für das Summieren dieser Reihe ziehe man davon die Reihe Vaa ab und es wird

$$V(1-aa) = 1 + 3aa + 5a^4 + 7a^6 + 9a^8 + \text{etc.}$$

zurückbleiben. Man multipliziere erneut auf beiden Seiten mit $1-aa$ und es wird

$$V(1-aa)^2 = 1 + 2aa + 2a^4 + 2a^6 + 2a^8 + \text{etc.}$$

hervorgehen, welche erneut mit $1-aa$ multipliziert

$$V(1-aa)^3 = 1 + aa \quad \text{und daher} \quad V = \frac{1+aa}{(1-aa)^3}$$

liefert. Als logische Konsequenz wird das gesuchte Integral

$$= \pi(1+aa)$$

sein, was natürlich aus der eigentlichen Integration entspringt, weil

$$\int \partial\varphi(1 + aa - 2a\cos\varphi) = (1+aa)\varphi - 2a\sin\varphi$$

ist, was für $\varphi = \pi$ in $(1 + aa)\pi$ übergeht.

II. Es sei $\lambda = 1$ und das gesuchte Integral

$$\pi a(1 - aa)^3 V,$$

wo für die zweiten Faktoren

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = +1, \quad \binom{-1}{3} = -1, \quad \binom{-1}{4} = +1, \quad \binom{-1}{5} = -1 \quad \text{etc.}$$

ist. Die ersten Faktoren werden hingegen

$$\binom{-3}{0} = -1, \quad \binom{-3}{1} = -3, \quad \binom{-3}{2} = 6, \quad \binom{-3}{3} = -10,$$
$$\binom{-3}{4} = 15, \quad \binom{-3}{5} = -21, \quad \binom{-3}{6} = 28, \quad \binom{-3}{7} = -36 \quad \text{etc.;}$$

daher werden wir also

$$V = -1 - 3aa - 6a^4 - 10a^6 - 15a^8 - 21a^{10} - 28a^{12} - 36a^{14} - \text{etc.}$$

haben. Für deren Summation multipliziere man auf beiden Seiten mit $1 - aa$ und es wird

$$V(1 - aa) = -1 - 2aa - 3a^4 - 4a^6 - 5a^8 - 6a^{10} - 7a^{12} - 8a^{14} - \text{etc.}$$

hervorgehen; durch erneutes Multiplizieren mit $1 - aa$ geht

$$V(1 - aa)^2 = -1 - aa - a^4 - a^6 - a^8 - a^{10} - a^{12} - a^{14} - \text{etc.}$$

hervor und nochmaliges Multiplizieren mit $1 - aa$ wird

$$V(1 - aa)^3 = -1$$

sein, sodass

$$V = -\frac{1}{(1 - aa)^3}$$

ist; als logische Konsequenz ist das gesuchte Integral

$$= -\pi a.$$

Aber die Integration liefert wegen

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

zunächst

$$\int \partial \cos\varphi\varphi(1+aa-2a\cos\varphi) = (1+aa)\sin\varphi - a\varphi - \frac{1}{2}a\sin 2\varphi,$$

woher durch Setzen von $\varphi = \pi$ das Integral $= -a\pi$ entspringt.

FALL III,
IN DEM $n = -3$ UND DIESE INTEGRALFORMEL VORGELEGT IST

$$\int \partial\varphi\cos\lambda\varphi(1+aa-2a\cos\varphi)^2 \begin{bmatrix}\text{von } \varphi = 0\\ \text{bis } \ \varphi = \pi\end{bmatrix}$$

In diesem Fall wird also aus der allgemeinen Form das Integral

$$\pi a^\lambda (1-aa)^5 V$$

sein, mit

$$V = \left(\frac{-3-\lambda}{0}\right)\left(\frac{-3+\lambda}{\lambda}\right) + \left(\frac{-3-\lambda}{1}\right)\left(\frac{-3+\lambda}{\lambda+1}\right)a^2$$
$$+ \left(\frac{-3-\lambda}{2}\right)\left(\frac{-3+\lambda}{\lambda+2}\right)a^4 + \left(\frac{-3-\lambda}{3}\right)\left(\frac{-3+\lambda}{\lambda+3}\right)a^6 + \text{etc.},$$

wo die letzten Faktoren offensichtlich alle verschwinden, wannimmer entweder $\lambda = 3$ oder $\lambda > 3$ war, in welchen Fällen also das ganze Integral verschwindet, wie jedem, der die Rechnung durchführt, leicht klar werden wird; es bleiben aber drei zu betrachtende Fälle übrig, in denen $\lambda < 3$ ist.

I. Es sei $\lambda = 0$; und so die ersten wie die zweiten Faktoren werden übereinstimmen und sie werden

$$\left(\frac{-3}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-3}{1}\right) = -3, \quad \left(\frac{-3}{2}\right) = 6, \quad \left(\frac{-3}{3}\right) = -10,$$

$$\binom{-3}{4} = 15, \quad \binom{-3}{5} = -21, \quad \binom{-3}{6} = 28 \quad \text{etc.}$$

sein, woher man

$$V = 1 + 9aa + 36a^4 + 100a^6 + 225a^8 + 441a^{10} + \text{etc.}$$

berechnet; diese Reihe, weil sie schließlich zu konstanten Differenzen führt, wird in gleicher Weise wie zuvor summiert werden können. Denn die erste Multiplikation mit $1 - aa$ liefert

$$V(1 - aa) = 1 + 8aa + 27a^4 + 64a^6 + 125a^8 + 216a^{10} + 343a^{12} + \text{etc.}$$

Die zweite Multiplikation mit $1 - aa$ liefert

$$V(1 - aa)^2 = 1 + 7aa + 19a^4 + 37a^6 + 61a^8 + 91a^{10} + 127a^{12} + \text{etc.}$$

Die dritte Multiplikation gibt

$$V(1 - aa)^3 = 1 + 6aa + 12a^4 + 18a^6 + 24a^8 + 30a^{10} + \text{etc.}$$

Die vierte Multiplikation gibt

$$V(1 - aa)^4 = 1 + 5aa + 6a^4 + 6a^6 + 6a^8 + 6a^{10} + \text{etc.}$$

und schließlich

$$V(1 - aa)^5 = 1 + 4aa + a^4,$$

sodass

$$V = \frac{1 + 4aa + a^4}{(1 - aa)^5}$$

ist; als logische Konsequenz wird der gesuchte Wert des Integrals in diesem Fall

$$\pi(1 + 4aa + a^4)$$

sein, welches wunderbar mit dem auf gewohnte Weise gefundenen Integral übereinstimmt.

II. Es sei $\lambda = 1$; in diesem Fall werden die ersten Faktoren von V

$$\binom{-4}{0} = 1, \quad \binom{-4}{1} = -4, \quad \binom{-4}{2} = 10, \quad \binom{-4}{3} = -20,$$
$$\binom{-4}{4} = 35, \quad \binom{-4}{5} = -56, \quad \binom{-4}{6} = 84, \quad \binom{-4}{7} = -120 \quad \text{etc.}$$

sein, die zweiten verhalten sich hingegen so

$$\binom{-2}{1} = -2, \quad \binom{-2}{2} = +3, \quad \binom{-2}{3} = -4, \quad \binom{-2}{4} = +5,$$
$$\binom{-2}{5} = -6, \quad \binom{-2}{6} = +7, \quad \binom{-2}{7} = -8, \quad \binom{-2}{8} = +9 \quad \text{etc.}$$

und daher

$$V = -2 - 12a^2 - 40a^4 - 100a^6 - 210a^8 - 392a^{10} - 672a^{12} - 1080a^{14} - \text{etc.},$$

welche Reihe, weil sie schließlich zu konstanten Differenzen führt, in gleicher Weise wie zuvor summiert werden können wird. Denn die erste Multiplikation mit $1 - aa$ gibt

$$V(1-aa) = -2 - 10a^2 - 28a^4 - 60a^6 - 110a^8 - 182a^{10} - 280a^{12} - \text{etc.}$$

Die zweite Multiplikation mit $1 - aa$ liefert

$$V(1-aa)^2 = -2 - 8a^2 - 18a^4 - 32a^6 - 50a^8 - 72a^{10} - 98a^{12} - \text{etc.}$$

Die dritte Multiplikation gibt

$$V(1-aa)^3 = -2 - 6a^2 - 10a^4 - 14a^6 - 18a^8 - 22a^{10} - 26a^{12} - \text{etc.}$$

Die vierte Multiplikation gibt

$$V(1-aa)^4 = -2 - 4a^2 - 4a^4 - 4a^6 - 4a^8 - 4a^{10} - 4a^{12} - \text{etc.}$$

und schließlich liefert die fünfte Multiplikation mit $1 - aa$

$$V(1-aa)^5 = -2 - 2aa = -2(1+aa);$$

daher berechnet man

$$V = -\frac{2(1+aa)}{(1-aa)^5}$$

und daher wird der gesuchte Wert des Integrals

$$= -2\pi a(1+aa)$$

sein, welcher hervorragend mit dem auf die gewohnte Weise gefundenen Integral übereinstimmt.

III. Es sei $\lambda = 2$ und die ersten Faktoren von V werden

$$\left(\frac{-5}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-5}{1}\right) = -5, \quad \left(\frac{-5}{2}\right) = 15, \quad \left(\frac{-5}{3}\right) = -35,$$
$$\left(\frac{-5}{4}\right) = 70, \quad \left(\frac{-5}{5}\right) = -126, \quad \left(\frac{-5}{6}\right) = 210, \quad \left(\frac{-5}{7}\right) = -330 \quad \text{etc.},$$

sein, die zweiten Faktoren werden sich hingegen so verhalten

$$\left(\frac{-1}{2}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{4}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{5}\right) = -1,$$
$$\left(\frac{-1}{6}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{7}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{8}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{9}\right) = -1 \quad \text{etc.},$$

woher man

$$V = 1 + 5a^2 + 15a^4 + 35a^6 + 70a^8 + 126a^{10} + 210a^{12} + 330a^{14} + \text{etc.}$$

berechnet, welche Reihe auf dieselbe Weise summiert wie oben

$$V = +\frac{1}{(1-aa)^5}$$

liefert, woher man den Wert des gesuchten Integral als

$$= \pi aa$$

berechnet, welcher mit dem auf gewohnte Weise gefundenen Integral natürlich wunderbar übereinstimmt.

§4 Wenn wir also diese Integrale, in denen n eine negative Zahl ist, mit denen vergleichen, in denen n eine positive Zahl ist, wird eine besondere Analogie zwischen den Werten dieser Formeln

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos\lambda\varphi \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

entdeckt; wenn diese Eigenschaft über viele Fälle hindurch untersucht wird, gibt das uns das folgende höchst bemerkenswerte Theorem an die Hand.

Theorem

§5 *Nachdem der Kürze wegen*

$$\Delta = 1 + aa - 2a\cos\varphi$$

gesetzt worden ist und wenn die Integrale von der Grenze $\varphi = 0$ bis hin zur Grenze $\varphi = 180^\circ$ erstreckt werden, wird das folgende Verhältnis stets gelten

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos\lambda\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{\Delta^{n+1}} = \left(\frac{n}{\lambda}\right)(1-aa)^n : \left(\frac{-n-1}{\lambda}\right)(1-aa)^{-n-1},$$

oder wenn wir

$$\frac{\Delta}{1-aa} = \frac{1+aa-2a\cos\varphi}{1-aa} = \Gamma$$

setzen, wird einfacher

$$\int \Gamma^n \partial\varphi \cos\lambda\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{\Gamma^{n+1}} = \left(\frac{n}{\lambda}\right) : \left(\frac{-n-1}{\lambda}\right)$$

sein.

§6 Wenn wir also eines Beispiels wegen $n = 2$ setzen, wird aus dem ersten Verhältnis

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos\lambda\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos\lambda}{\Delta^3} = \left(\frac{2}{\lambda}\right)(1-aa)^2 : \left(\frac{-3}{\lambda}\right)(1-aa)^{-3}$$

sein; daher, wenn $\lambda = 0$ ist, wird wegen $\left(\frac{2}{0}\right) = 1$ und $\left(\frac{-3}{0}\right) = 1$

$$\int \Delta^2 \partial\varphi : \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = (1-aa)^2 : \frac{1}{(1-aa)^3} = 1 : \frac{1}{(1-aa)^5}$$

sein und daher wird

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{(1-aa)^5} \int \Delta^2 \partial\varphi$$

sein. Weil also

$$\int \Delta^2 \partial\varphi = \pi(1+4aa+a^4)$$

ist, wird

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi}{(1-aa)^5}(1+4aa+a^4)$$

sein.

§7 Während $n = 2$ bleibt, sei $\lambda = 1$; wegen $\left(\frac{2}{1}\right) = 2$ und $\left(\frac{3}{1}\right) = -3$ wird

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} = 2(1-aa)^3 : -3(1-aa)^{-3} = 1 : \frac{-3}{2(1-aa)^5}$$

sein, woher

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} = \frac{-3}{2(1-aa)^5} \int \Delta^2 \partial\varphi \cos\varphi$$

wird; weil also

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos\varphi = -2\pi a(1+aa)$$

ist, wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} = \frac{+3\pi a(1+aa)}{(1-aa)^5}$$

sein.

§8 In gleicher Weise nehme man $\lambda = 2$ und wegen $\left(\frac{2}{2}\right) = 1$ und $\left(\frac{-3}{2}\right) = 6$ wird

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos 2\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^3} = (1-aa)^2 : 6(1-aa)^{-3} = 1 : \frac{6}{(1-aa)^5}$$

sein, woher

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{6}{(1-aa)^5} \int \Delta^2 \partial\varphi \cos 2\varphi$$

wird. Es war aber

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos 2\varphi = \pi aa,$$

als logische Konsequenz

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{6\pi aa}{(1-aa)^5}.$$

§9 Weil das Symbol $\left(\frac{n}{\lambda}\right)$ im Fall $\lambda = n$ ja $= 1$ wird, aber in den Fällen, in denen $\lambda > n$ ist, immer $\left(\frac{n}{\lambda}\right) = 0$ ist, wenn λ freilich eine ganze Zahl war, wie wir hier durchgehend angenommen haben, ist es ersichtlich, dass in diesen Fällen, in denen $\lambda > n$ ist, der Wert der Formel $\int \Delta^n \partial\varphi \cos \lambda\varphi$ verschwindet.

§10 Das Theorem, welches wir hier vorgelegt haben, ist nicht nur wegen der Schlichtheit des Verhältnisses der ganzen Aufmerksamkeit würdig, sondern auch, weil wir es nur über mehrere Fälle allein mit Induktion erschlossen haben und noch kein anderer Weg offenzustehen scheint, auf welchem seine Gültigkeit direkt bewiesen werden kann; Theoreme von dieser Art verdienen in der Tat die volle Aufmerksamkeit. Wir wollen aber noch andere bemerkenswerte Fälle unseres anfangs vorgelegten Theorems entwickeln.

Entwicklung des Falles, in dem $\lambda = n$ und diese Integralformel vorgelegt ist

$$\int \frac{\partial\varphi \cos n\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

Aus der allgemeinen Formel wird in diesem Fall das Integral

$$\frac{\pi a^n}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

sein, mit

$$V = \binom{0}{0}\binom{2n}{n} + \binom{0}{1}\binom{2n}{n+1} aa + \binom{0}{2}\binom{2n}{n+2} a^4 + \text{etc.},$$

wo natürlich alle Terme außer dem ersten verschwinden, sodass $V = \binom{2n}{n}$ und daher unser Integral

$$\int \frac{\partial\varphi \cos n\varphi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^n}{(1-aa)^{2n+1}} \cdot \binom{2n}{n}$$

ist; dort bemerke man, dass die Werte dieses Symbols $\binom{2n}{n}$ sich für die Werte der Zahl n auf die folgende Weise verhalten werden:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	etc.
$\binom{2n}{n}$	1	2	6	20	70	252	924	3432	etc.

welche Reihe sehr leicht über diese Faktoren fortgesetzt werde

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{6}{2}, \quad \frac{10}{3}, \quad \frac{14}{4}, \quad \frac{18}{5}, \quad \frac{22}{6}, \quad \frac{26}{7} \quad \text{etc.}$$

Das letzte gefundene Theorem hingegen wird auf diesen Fall angewandt dieses Verhältnis liefern

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos n\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos n\varphi}{\Delta^{n+1}} = (1-aa)^n : \binom{-1-n}{n} (1-aa)^{n-1},$$

woher

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos n\varphi = \frac{\pi a^n}{\binom{-n-1}{n}} \cdot \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} \pi a^n : \binom{-n-1}{n}$$

wird; dort bemerke man, dass die Werte dieses Symbols $\binom{-n-1}{n}$ für die verschiedenen Werte von n sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	etc.,
$\binom{-n-1}{n}$	1	-2	6	-20	70	-252	924	etc.,

woher klar ist, dass $\binom{-n-1}{n} = \pm\binom{2n}{n}$ gilt, während das obere Vorzeichen gilt, wannimmer n eine gerade Zahl ist, ansonsten aber das untere Vorzeichen, wannimmer n eine ungerade Zahl ist; daher wird also

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos n\varphi = \pm\pi a^n$$

sein. Nachdem diese Dinge bemerkt worden sind, wollen wir die einfacheren Fälle für jede der beiden Integralformeln entwickeln.

$$\begin{array}{c|ll|ll}
n=0 & \int \frac{\partial\varphi}{\Delta} & = \frac{\pi}{1-aa} & \int \partial\varphi & = +\pi, \\
n=1 & \int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} & = \frac{2\pi a}{(1-aa)^3} & \int \Delta\partial\varphi\cos\varphi & = -\pi a, \\
n=2 & \int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta^3} & = \frac{6\pi a^2}{(1-aa)^5} & \int \Delta^2\partial\varphi\cos 2\varphi & = +\pi a^2, \\
n=3 & \int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^4} & = \frac{20\pi a^3}{(1-aa)^7} & \int \Delta^3\partial\varphi\cos 3\varphi & = -\pi a^3, \\
n=4 & \int \frac{\partial\varphi\cos 4\varphi}{\Delta^5} & = \frac{70\pi a^4}{(1-aa)^9} & \int \Delta^4\partial\varphi\cos 4\varphi & = +\pi a^4, \\
n=5 & \int \frac{\partial\varphi\cos 5\varphi}{\Delta^6} & = \frac{252\pi a^5}{(1-aa)^{11}} & \int \Delta^5\partial\varphi\cos 5\varphi & = -\pi a^5, \\
n=6 & \int \frac{\partial\varphi\cos 6\varphi}{\Delta^7} & = \frac{924\pi a^6}{(1-aa)^{13}} & \int \Delta^6\partial\varphi\cos 6\varphi & = +\pi a^6
\end{array}$$

etc.

Hier tritt der bemerkenswerte Umstand auf, dass in diesen Fällen $\lambda = n$ die Integrale so kurz ausgedrückt werden; nun wollen wir aber anderen Fälle betrachten, in denen dem Buchstaben λ nacheinander 0, 1, 2, 3 etc. zugeteilt werden.

ENTWICKLUNG DES FALLES, IN WELCHEM $\lambda = 0$ UND DIESE INTEGRALFORMEL VORGELEGT IST

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

§11 Weil hier $\lambda = 0$ ist, wird das gesuchte Integral aus unserer Formel

$$\frac{\pi}{(1-aa)^{2n+1}}V$$

sein, mit

$$V = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 aa + \binom{n}{2}^2 a^4 + \binom{n}{1}^2 a^6 + + \binom{n}{1}^2 a^8 + \text{etc.};$$

gleichzeitig wird aber daraus auch der Wert dieser Formel $\int \Delta^n \partial\varphi$ angegeben werden können, weil

$$\int \Delta^n \partial\varphi : \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = (1-aa)^n : (1-aa)^{-n-1} = (1-aa)^{2n+1} : 1$$

ist, aus welchem Verhältnis man

$$\int \Delta^n \partial\varphi = \pi V$$

hat.

Wir wollen also die einfacheren Fälle für den Exponenten n durchgehen, welche wir in der folgenden Tabelle beifügen wollen

$$n=0\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}=\frac{\pi}{1-aa},\\[2ex] \displaystyle\int\partial\varphi=\pi,\end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi}{(1-aa)^2}(1+aa),\\[2ex] \displaystyle\int\partial\Delta\varphi=\pi(1+aa),\end{cases}$$

$$n=2\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}=\frac{\pi}{(1-aa)^5}(1+2^2aa+a^4),\\[2ex] \displaystyle\int\partial\varphi=\pi(1+2^2aa+a^4),\end{cases}$$

$$n=3\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^4}=\frac{\pi}{(1-aa)^7}(1+3^2aa+3^2a^4+a^6),\\[2ex] \displaystyle\int\Delta^3\partial\varphi=\pi(1+3^2aa+3^2a^4+a^6),\end{cases}$$

$$n=4\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^5}=\frac{\pi}{(1-aa)^9}(1+4^2aa+6^2a^4+4^2a^6+a^8),\\[2ex] \displaystyle\int\Delta^4\partial\varphi=\pi(1+4^2aa+6^2a^4+4^2a^6+a^8),\end{cases}$$

etc.

Entwicklung der Fälle, in denen $\lambda = 1$ und diese Integralformel vorgelegt ist

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

§12 In diesem Fall wird also das gesuchte Integral

$$\frac{\pi a}{(1-aa)^{2n+1}}V$$

sein, mit

$$V = \binom{n-1}{0}\binom{n+1}{1} + \binom{n-1}{1}\binom{n+1}{2}aa + \binom{n-1}{2}\binom{n+1}{3}a^4$$

$$+\binom{n-1}{3}\binom{n+1}{4}a^6 + \binom{n-1}{4}\binom{n+1}{5}a^8 + \binom{n-1}{5}\binom{n+1}{6}a^{10} + \text{etc.}$$

Weil aber dann wegen $\lambda = 1$

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^{n+1}} = n(1-aa)^n : -(n+1)(1-aa)^{-n-1}$$

ist, wird daher

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos\varphi = -\frac{n}{n+1}\cdot \pi a V.$$

Für die einfacheren Fälle von n wollen wir die folgende Tabelle beifügen:

$$n=0\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta}=\frac{\pi a}{1-aa},\\[2ex]\displaystyle\int\partial\varphi\cos\varphi=0,\end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}=\frac{2\pi a}{(1-aa)^3},\\[2ex]\displaystyle\int\Delta\partial\varphi\cos\varphi=-\pi a,\end{cases}$$

$$n=2\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}=\frac{\pi a}{(1-aa)^5}(1\cdot 3+1\cdot 3aa),\\[2ex]\displaystyle\int\Delta^2\partial\varphi\cos\varphi=-\frac{2}{3}\pi a(1\cdot 3+1\cdot 3aa),\end{cases}$$

$$n=3\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^4}=\frac{\pi a}{(1-aa)^7}(1\cdot 4+2\cdot 6aa+1\cdot 4a^4),\\[2ex]\displaystyle\int\Delta^3\partial\varphi\cos\varphi=-\frac{3}{4}\pi a(1\cdot 5+3\cdot 10aa+3\cdot 10a^4+1\cdot 5\cdot a^6),\end{cases}$$

$$n=4\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^5}=\frac{\pi a}{(1-aa)^9}(1\cdot 5+3\cdot 10aa+3\cdot 10a^4+1\cdot 5\cdot a^6),\\[2ex]\displaystyle\int\Delta^4\partial\varphi\cos\varphi=-\frac{4}{5}\pi a(1\cdot 5+3\cdot 10aa+3\cdot 10a^4+1\cdot 5\cdot a^6),\end{cases}$$

$$n=5\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^6}=\frac{\pi a}{(1-aa)^{11}}(1\cdot 6+4\cdot 15aa+6\cdot 20a^4+4\cdot 15a^6+1\cdot 6a^8),\\[2ex]\displaystyle\int\Delta^2\partial\varphi\cos\varphi=-\frac{5}{6}\pi a(1\cdot 6+4\cdot 15aa+6\cdot 20a^4+4\cdot 15+\text{etc.}),\end{cases}$$

$$n=6\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^7}=\frac{\pi a}{(1-aa)^{13}}(1\cdot 7+5\cdot 21aa+10\cdot 35a^4+10\cdot 35a^6+\text{etc.}),\\[2ex]\displaystyle\int\Delta^6\partial\varphi\cos\varphi=-\frac{6}{7}\pi a(1\cdot 7+5\cdot 21aa+10\cdot 35a^4+10\cdot 35a^6+\text{etc.}),\end{cases}$$

etc.

Entwicklung der Fälle, in denen $\lambda = 1$ und diese Integralformel vorgelegt ist

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

§13 In diesem Fall wird das gesuchte Integral

$$\frac{\pi a^2}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

sein, mit

$$V = \binom{n-2}{0}\binom{n+2}{2} + \binom{n-2}{1}\binom{n+2}{3} aa + \binom{n-2}{2}\binom{n+2}{4} a^4$$

$$+ \binom{n-2}{3}\binom{n+2}{5} a^6 + \binom{n-2}{4}\binom{n+2}{6} a^8 + \text{etc.},$$

dann wird aber die andere Form

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos 2\varphi = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \pi aaV$$

sein. Wir wollen also wie bisher die einfacheren Fälle durchgehen, und weil die Integration der Formel $\int \Delta^n \partial\varphi \cos 2\varphi$ von selbst aus der letzten Formel klar ist, wäre es überflüssig, diese Integrale aufzuführen:

$$\begin{array}{l|l}
n=0 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta} = \frac{\pi aa}{1-aa}, \\
n=1 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^3}(1\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot aa), \\
n=2 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^5}(1\cdot 6), \\
n=3 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^7}(1\cdot 10 + 1\cdot 10aa), \\
n=4 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^9}(1\cdot 15 + 2\cdot 20aa + 1\cdot 15a^4), \\
n=5 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^6} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^{11}}(1\cdot 21 + 3\cdot 35a^2 + 3\cdot 35a^4 + 1\cdot 21a^6), \\
n=6 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^7} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^7}(1\cdot 28 + 4\cdot 56aa + 6\cdot 70a^4 + 4\cdot 56a^6 + 1\cdot 28a^8)
\end{array}$$

etc.

Entwicklung der Fälle, in denen $\lambda = 1$ und diese Integralformel vorgelegt ist

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

§14 In diesem Fall wird das Integral also

$$\frac{\pi a^3}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

sein, mit

$$V = \binom{n-3}{0}\binom{n+3}{3} + \binom{n-3}{1}\binom{n+3}{4} aa + \binom{n-3}{2}\binom{n+3}{5} a^4$$
$$+ \binom{n-3}{3}\binom{n+3}{6} a^6 + \text{etc.},$$

für die andere Formel werden wir aber

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos 3\varphi = -\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\pi a^3 V$$

haben. Für die wesentlichen Fälle werden wir aber die folgende Tabelle haben:

$$\begin{array}{l|l}
n=0 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^3}{1-aa}, \\
n=1 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^3}(1\cdot 4 - 2\cdot 1aa), \\
n=2 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^5}(1\cdot 10 - 1\cdot 5aa + 1\cdot 1a^4), \\
n=3 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^7}(1\cdot 20), \\
n=4 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^9}(1\cdot 35 + 1\cdot 35aa), \\
n=5 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^6} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^{11}}(1\cdot 56 + 2\cdot 70aa + 1\cdot 56a^4), \\
n=6 & \displaystyle\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^7} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^{13}}(1\cdot 84 + 3\cdot 126aa + 3\cdot 126a^4 + 1\cdot 84a^6)
\end{array}$$

etc.

Beobachtung über die negativen Werte von λ

§15 Wir haben schon anfangs erwähnt, dass für den Buchstaben λ nur ganze positive Zahlen genommen werden müssen, von welcher Bedingung die Allgemeinheit unserer Frage nicht eingeschränkt wird, weil immer $\cos(-\lambda\varphi) = \cos\lambda\varphi$ ist. Dennoch ergibt sich hier ein außergewöhnliches Paradoxon, dass die oben gefundenen Lösungen falsch werden, wannimmer λ negative Werte zugeteilt werden; damit dies klarer wird, wollen wir den Fall $n = 0$ betrachten, für welchen wir oben

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^\lambda}{1-aa}$$

gefunden haben; daher scheint folgen zu müssen, dass im Fall $\lambda = -i$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{a^i(1-aa)}$$

sein wird, was aber offensichtlich falsch ist, weil das wahre Integral natürlich $\frac{\pi a^i}{1-aa}$ ist, als wenn $\lambda = +i$ wäre. Aber diese Einschränkung ist nur eine scheinbare und unsere allgemeine Formel nichtsdestoweniger mit der Wahrheit verträglich, auch wenn dem Buchstaben λ negative Werte zugeteilt werden, solange sie ganzzahlige waren, weil wir ja angenommen haben, dass im Fall $\varphi = \pi$ immer $\sin\lambda\varphi = 0$ ist; in diesem Fall wird es also besonders der Mühe wert sein, das deutlicher gezeigt zu haben.

§16 Es wird aber genügen, den Fall $n = 0$ betrachtet zu haben, für welchen unsere allgemeine Lösung

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^\lambda}{1-aa} V$$

liefert, mit

$$V = \left(\frac{-\lambda}{0}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right) + \left(\frac{-\lambda}{1}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)aa + \left(\frac{-\lambda}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+2}\right) + \left(\frac{-\lambda}{3}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+3}\right)a^6 + \text{etc..}$$

Von diesem Ausdruck bleibt nur der erste Teil zurück, wannimmer λ eine ganze positive Zahl ist, weil dann die Formeln $\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$, $\left(\frac{\lambda}{\lambda+2}\right)$, $\left(\frac{\lambda}{\lambda+3}\right)$ etc. verschwinden; weit anders verhält sich die Sache, wannimmer für λ eine negative Zahl angenommen wird, wie wenn wir beispielsweise $\lambda = -i$ setzen; dann wird

$$V = \left(\frac{i}{0}\right)\left(\frac{-i}{-i}\right) + \left(\frac{i}{1}\right)\left(\frac{-i}{1-i}\right)aa + \left(\frac{i}{2}\right)\left(\frac{-i}{2-i}\right)a^4 + \left(\frac{i}{3}\right)\left(\frac{-i}{3-i}\right)a^6 + \text{etc.}$$

sein; dort bemerke man, dass die Werte dieser Symbole, solange der Nenner negativ ist, verschwinden; weil ja aber die Nenner immer weiter wachsen, werden sie schließlich positiv werden und daher bestimmte Werte darbieten. Um das zu zeigen, wollen wir zuerst $\lambda = -1$ und $i = +1$ setzen, und es wird

$$V = \left(\frac{1}{0}\right)\left(\frac{-1}{-1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{-1}{0}\right)aa$$

sein, wo das erste Glied ohne Zweifel = 0 ist, das zweite ist hingegen

$$\binom{1}{1}\left(\frac{-1}{0}\right)aa = aa.$$

Weil also im Fall $\lambda = -1$ $V = aa$ ist, liefert unsere Formel dieses Integral

$$\int \frac{\partial\varphi\cos(-\varphi)}{\Delta} = \frac{\pi a^{-1}}{1-aa}\cdot aa = \frac{\pi a}{1-aa},$$

was vollkommen korrekt ist.

§17 Wir wollen nun $\lambda = -2$ oder $i = 2$, während $n = 0$ bleibt, nehmen und es wird

$$V = \binom{2}{0}\left(\frac{-2}{-2}\right) + \binom{2}{1}\left(\frac{-2}{-1}\right)aa + \binom{2}{2}\left(\frac{-2}{0}\right)a^4$$

sein, wo die folgenden Terme offensichtlich verschwinden; wegen der letzten Brüche verschwinden aber die anfänglichen Terme auch wegen der negativen Nenner, aber wegen $\left(\frac{-2}{0}\right)$ liefert der dritte Term $V = a^4$; als logische Konsequenz werden wir im Fall

$$\int \frac{\partial\varphi\cos(-2\varphi)}{\Delta} = \frac{\pi a^{-2}}{1-aa}\cdot a^4 = \frac{\pi aa}{1-aa}$$

haben, genauso wie wir zuvor für

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta}$$

gefunden haben.

§18 In gleicher Weise wird leicht eingesehen, dass im Fall $\lambda = -3$ entsprechend $V = a^6$ hervorgehen wird und auf dieselbe Weise wird man im Fall $\lambda = -4$ auch $V = a^8$ gefunden werden; und daher wird man im Fall $\lambda = -i$ im Allgemeinen $V = a^{2i}$ erhalten; und so wird das Integral dieser Formel

$$\int \frac{\partial\varphi\cos(-i\varphi)}{\Delta}$$

entsprechend

$$\frac{\pi a^i}{1-aa}\cdot a^{2i} = \frac{\pi a^i}{1-aa}$$

sein, was das Integral der Formel

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta}$$

ist, wie es die Natur der Sache erfordert.

§19 Aber eine solche außergewöhnliche Übereinstimmung wird für alle Werte von n Geltung haben. Es sei nämlich eines Beispiels wegen $n = 2$ und unsere Integration

$$\int \frac{\partial\varphi \cos \lambda\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^5} V,$$

mit

$$V = \left(\frac{2-\lambda}{0}\right)\left(\frac{2+\lambda}{\lambda}\right) + \left(\frac{2-\lambda}{1}\right)\left(\frac{2+\lambda}{\lambda+1}\right) aa + \left(\frac{2-\lambda}{2}\right)\left(\frac{2+\lambda}{\lambda+2}\right) + \text{etc.};$$

daher für $\lambda = -3$, dass unsere Formel

$$\int \frac{\partial\varphi \cos(-3\varphi)}{\Delta^3} = \frac{\pi a^{-3}}{(1-aa)^5} V$$

ist, mit

$$V = \left(\frac{5}{0}\right)\left(\frac{-1}{-3}\right) + \left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{-1}{-2}\right) aa + \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{-1}{-1}\right) a^4 + \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{-1}{0}\right) a^6$$
$$+ \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{-1}{1}\right) a^8 + \left(\frac{5}{5}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) a^{10},$$

wo die drei ersten Glieder verschwinden, die folgenden werden aber wegen

$$\left(\frac{-1}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{1}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{2}\right) = 1$$

dann

$$V = 10a^6 - 5a^8 + a^{10} = a^6(10 - 5aa + a^4)$$

geben, als logische Konsequenz wird unser Integral

$$\int \frac{\partial\varphi \cos(-3\varphi)}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^5}(10 - 5aa + a^4),$$

genauso wie wir oben für den Fall

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^3}$$

gefunden haben; eine solche Übereinstimmung wird in der Tat immer entdeckt werden.